Друга година -- поправни испит

Испит се састоји из писменог и усменог дела. Писмени део траје два школска часа

Садржај:

1. Степеновање

2. Кореновање

3. Комплексни бројеви

4. Квадратна једначина, квадратна функција, квадратна неједначина

5. Тригонометрија

6. Експоненцијална функција, јеначина и неједначина

Логаритамска функција, једначина и неједначина

Литература:

- Уџбеник за 2.разред средње школе(4 часа недељно)
- Збирке задатака од: 1) Вене Богославов
- 2) Срђан Огњановић
- 3) Милорад Јоковић, Иванка Томић
- Припремили: Д. Радојевић,Д.Михајловић,Н.Васиљевић

1. СТЕПЕНОВАЊЕ:

1. Израчунати:

$$\frac{0{,}027\cdot 0{,}09^{-2}\cdot 10^{-3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-8}\cdot\left(10^{-4}\right)^{2}}\qquad \frac{0{,}125\cdot 25^{-2}\cdot 0{,}5\cdot 10^{2}}{0{,}25\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}05}$$

$$\left(6-4\left(\frac{15}{16}\right)^{0}\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\frac{3}{4}\qquad \frac{5^{0}+3^{-2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}}{2^{-4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+1}\cdot\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}\qquad \frac{\left((-5)^{-6}\right)^{-2}\cdot 75^{-2}\cdot 25^{2}}{\left(25^{-2}\right)^{-4}\cdot 6^{-2}\cdot 10^{-4}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+0{,}2^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-4}$$

$$\left(2-4\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\frac{3}{4}$$

2.Упростити:

$$\left(\frac{a^{-1}x^{3}}{b^{-1}y^{4}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{a^{4}b^{-3}}{x^{3}y^{-2}}\right)^{3}\qquad \left(\left(\frac{a^{-2}b}{xy^{-3}}\right)^{-3}\div\left(\frac{ab^{-2}}{x^{2}y}\right)^{2}\right)\cdot\left(\frac{xy}{ab}\right)^{3}$$

$$\frac{\left(a^{3}b^{-4}\right)^{2}}{\left(2a^{-3}b^{4}\right)^{3}}\div\frac{\left(a^{-3}b^{-2}\right)^{2}}{\left(4a^{-4}b^{-5}\right)}\qquad \left(\frac{a^{-2}b}{xy^{-3}}\right)^{-3}\div\left(\frac{ab^{-2}}{x^{2}y}\right)^{-2}$$

$$\frac{\left(a^{3}b^{-4}\right)^{2}}{\left(2a^{-3}b^{4}\right)^{3}}\div\frac{\left(a^{-3}b^{-2}\right)^{-2}}{\left(4a^{-4}b^{-5}\right)^{-1}}\qquad \left(\left(\frac{2a^{-2}}{3ab^{-3}}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3b^{-3}}{4a^{-2}}\right)^{-3}\right):\frac{b^{7}}{12^{-1}a^{-11}}$$

$$\left(\left(\frac{3^{-1}a^{2}}{4^{-1}b^{3}}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{4}{9a^{-2}b}\right)^{2}\right):\frac{1}{12a^{5}b^{-2}}$$

3.Упрости $\left((a+1)^{-1}-(b+1)^{-1}\right)^{-1}\div(a-b)^{-1}$

4.Упростити:

$$\frac{\left(ab^{-1}-ba^{-1}\right)^{-1}}{\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^{-1}}\cdot(a+b)^{-1}\qquad \left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}-ba^{-1}}\right)^{-1}+\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{2}\right)^{-1}$$

$$\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\left(\frac{a^{2}+b^{2}}{ab}\right)^{-1}\qquad \left(\frac{ab^{-1}-ba^{-1}}{2}\right)^{-1}\div\left(\frac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}\right)\qquad \left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}-\frac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)^{-1}\left(a^{-1}-b^{-1}\right)$$

2. КОРЕНОВАЊЕ:

1.Израчунати:

$$\sqrt{200}+2\sqrt{8}-\left(\sqrt{50}-2\sqrt{125}+3\sqrt{75}\right) \qquad 3\sqrt{12}+\frac{2}{5}\sqrt{75}-7\sqrt{3}+\frac{8}{3}\sqrt{27}-\frac{5}{4}\sqrt{48}$$

$$2\sqrt{5}-\frac{2}{5}\sqrt{18\cdot 25}-2\sqrt{98}+\frac{1}{3}\sqrt{72}-\sqrt{45} \qquad \sqrt{12}+\sqrt{135}+\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt{60}-\sqrt{75}$$

$$\left(3\sqrt{3}-2\right)\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-2\right)^2 \qquad 2\sqrt{3}\left(5\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)-\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$$

$$\left(3\sqrt{3}-2\right)^2-\left(3\sqrt{3}+2\right)^2 \qquad \left(3\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{5}+1\right)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}} \qquad \frac{2}{\sqrt{2}-2}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{6}{3-\sqrt{3}}-\frac{4}{3-\sqrt{5}} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right):\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}-\frac{15}{\sqrt{3}-3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1} \qquad \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)$$

2.Упростити:

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} \qquad \frac{1+a}{1+(1+a)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1-a}{1-\left(\frac{1}{1+a}\right)^{-\frac{1}{2}}} \qquad \frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}+x}:\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}-1}$$

3.Упростити:

$$\sqrt{\frac{4a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt[12]{\frac{3b}{a}}+\sqrt[3]{\frac{3a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{3a}} \qquad \sqrt{\frac{a}{2b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2a^2b}{x}}\cdot\sqrt[4]{\frac{2b^2}{a^3}}\cdot\sqrt[12]{\frac{ab^2}{2x^2}}$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{3a^2b}{2c}}\cdot\sqrt{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}\right):\left(\sqrt[6]{\frac{a^3b^2}{2c}}\cdot\sqrt[12]{\frac{81b^7}{16c^7}}\right) \qquad \sqrt[6]{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{xy^2}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2y}{16}}:\left(\sqrt[3]{\frac{xy^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{x^2y}{8}}\right)$$

$$\sqrt[5]{a\sqrt[3]{b^8}}\cdot\sqrt[5]{a^3\sqrt[3]{a^2}}\cdot\sqrt[5]{b^2\sqrt[3]{ab}} \qquad \sqrt[3]{\frac{a^5}{x}}\cdot\sqrt[9]{\frac{x^8}{a^3}}\cdot\sqrt[18]{\frac{a^3}{x}} \qquad \sqrt{\frac{x}{y^2z}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2y}{z}}\cdot\sqrt[4]{\frac{xz}{y^3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{a}}:\sqrt{1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}:\sqrt[6]{\frac{a^2}{a^2-a+1}} \qquad \sqrt[3]{\frac{a}{x}+\frac{x}{a}-2}:\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x+y}{a-b}}\cdot\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{xy+y^2}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{x}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}}:\sqrt{\frac{2x+4}{x+2}}$$

3. КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ:

1. Наћи Re,Im,IzI,z, комплексног броја ако је дато:

$z=i^{121}\cdot(1+i)^{26}$ $\quad z=(2-3i)^2$ $\quad z=(i+3)(3+2i)+(3+5i)(5i-3)$

$z=\dfrac{6i+1}{1-7i}$.

2.Наћи реални и имагинарни део комплексног броја z , као и његов модуо, ако је $z=\dfrac{1+2i}{1-3i}-\dfrac{2-3i}{2+2i}$.

3.Ако је $z_1=2+3i$ $\quad z_2=-2-4i$ $\quad z_3=-1+i$ израчунати $z_1\cdot\overline{z_2}-\dfrac{z_1}{z_3}$, па за добијени резултат

одредити имагинарни и реални део.

4.Одредити реални и имагинарну део комплексног броја z , као и његов модуо, ако важи: $(2+i)z+2z-3=4+6i$

4.КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА, ФУНКЦИЈА, НЕЈЕДНАЧИНА:

Решити једначину:

а) $(x-1)^2-(x+1)^2+(x+3)^2=(2x-5)(3x-1)$ $\quad$ б) $(3x-1)^2-(2x+1)(2x-1)=(x-3)^2$

в) $(3-x)^2+(20+4x)^2=(x+15)^2$ $\quad$ г) $(3x-4)^2+(2x+1)^2-(3x-2)^2=(x-1)(x+11)$

Решити једначину:

а) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{5-x}+\dfrac{3x^2}{4(x^2-7x+10)}=0$ $\quad$ б) $1+\dfrac{2x}{x+4}+\dfrac{27}{2x^2+7x-4}=\dfrac{6}{2x-1}$

в) $\dfrac{2x+1}{3x-2}-\dfrac{2x-1}{3-2x}-\dfrac{4x^2-12x}{6x^2-13x+6}=0$ $\quad$ г) $\dfrac{x+6}{x-5}+\dfrac{x-5}{x+6}=\dfrac{12x+61}{x^2+x-30}$

д) $\dfrac{2x-3}{24x^2+36x}+\dfrac{2}{4x^2-9}-\dfrac{x-4}{12x^2-18x}=0$ $\quad$ ђ) $\dfrac{5x}{2x^2-x-1}-\dfrac{5}{2x+1}=\dfrac{4x-5}{x^2-1}$

ПРИРОДА РЕШЕЊА КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Дискриминанта D квадратне једначине $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ је $D=b^2-4ac$.
Ако је $D>0$ једначина има два различита реална решења.
Ако је $D=0$ једначина има двоструко реално решење
Ако је $D<0$ решење једначине је пар конјуговано-комплексних бројева.

1.Одредити реалан параметар тако да дата једначина,

а) има реална и једнака решења, б) има једно решење један, в) има реципрочна решења, г) има супротна решења.

$x^2+2(3-m)x+2m-3=0$

$4x^2-2(m+1)x+m^2-3m-1=0$

$x^2-2(m-2)x-(2m-4)=0$

$(m-2)x^2-(m+1)x+m+1=0$

2. Дата је квадратна једначина $x^2+kx+k=0$. Одредити k тако да су решења конјуговано-комплексни бројеви.

m

3.У зависности од реалног параметра одредити природу решења једначине:

а) $(m-1)x^2-(2m+1)x+m-1=0$ б) $mx^2+(2m+5)x+m=0$.

4. Одредити вредност реалног параметра m тако да решења дате квадратне једначине буду реална и једнака:

а) $x^2-2(m-1)x-4m=0$ б) $(2m+1)x^2-(m+2)x+m-3=0$

5.За које вредности параметра k једначина $kx^2-2(k+1)x+k-1=0$ има реална решења?

ВИЕТОВА ПРАВИЛА

Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0$, тада важе релације:

$\boxed{x_1+x_2=-\dfrac{b}{a};\quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}}$ *које се зову Виетове формуле.*

$$ax^2+bx+c=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$

1. Саставити квадратну једначину чија су решења:

   а) $x_1=2,\quad x_2=5$

   б) $x_1=1+3i\quad x_2=1-3i$

   в) $x_1=2\quad x_2=\dfrac{1}{2}$

2. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2-2mx+m^2+1=0$. Одредити $m\in R$ из релације $x_1^2+x_2^2=16$.

3. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2-2mx+2=0$. Одредити $m\in R$ из релације $(3x_1-1)(3x_2-1)=10$.

4. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $x^2-3x+5=0$, не решавајући је формирати квадратну једначину чија су решења $y_1=\frac{1}{x_1}$ и $y_2=\frac{1}{x_2}$.

5. Одредити вредност параметра a, тако да решења једначине $x^2-(a-2)x+1=0$ задовољавају услов: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{2}x_1x_2+\frac{1}{2}=0$

6. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $x^2-8x+2=0$, не решавајући је формирати квадратну једначину чија су решења $y_1=\frac{1}{x_1^2}$ и $y_2=\frac{1}{x_2^2}$.

7. Дата је једначина $3x^2-x-7=0$ чија су решења x_1 и x_2. Не решавајући ову једначину, одредити вредност израза: $4x_1^3+3x_1x_2^2+3x_1^2x_2+4x_2^3$

8. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $3x^2-5x-2=0$, не решавајући је формирати квадратну једначину чија су решења $y_1=x_1+2$ и $y_2=x_2+2$.

9. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $5x^2-3x-1=0$, не решавајући је, одредити вредност израза: $2x_1^3-3x_1x_2^2-3x_1^2x_2+2x_2^3$

10. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $5x^2-3x-1=0$, не решавајући је формирати квадратну једначину чија су решења $y_1=x_1+\frac{1}{x_2}$ и $y_2=x_2+\frac{1}{x_1}$.

11. Одредити вредност параметра k у једначини $x^2-(2k+1)x+k^2+2=0$, тако да једно њено решење буде једнако половини другог.

12. Решења једначине $x^2-x+a-2=0$ задовољавају услов: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{2}x_1x_2+4=0$. Одредити a.

13. У једначини $x^2+mx+8=0$, одредити реалан параметар m тако да је збир реципрочних вредности њених решења једнак $\frac{3}{4}$.

14. Скратити разломак:

а) $\frac{2x^2+5x+2}{x^2-x-6}$ б) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x}$ в) $\frac{3x^2+2x-8}{12x^2-7x-12}$

г) $\frac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$ д) $\frac{(x^2-4)(8x^3-1)}{(2x^2+3x-2)(4x^2-8x)}$ ђ) $\frac{(x^3-2x^2-8x)(x^2-16)}{(x^3+8)(x^2+4x)}$

КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

1.За дату функцију, написати канонски облик, скицирати график у координатном систему и написати особине:

а) $y = 4x^2 - 3$ б) $y = -x^2 + 5x$ в) $y = 2x^2 + 3x$ г) $y = 2x^2 + 3x + 1$ д) $y = -x^2 + x + 2$

ђ) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$ е) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8$

2. Испитати функције :

а) $y = |x-1| \cdot (x-2)$ б) $y = x|x| + 2x$

3.Дата је функција $y = ax^2 - (2a+1)x + 2(a+1)$. Одредити a тако да функција достиже екстремну вредност за $x = 2$. За добијено a испитати ток и скицирати график функције .

4. У функцији $y = x^2 - (k+1)x + k - 2$ одредити реалан параметар k тако да функција има минимум једнак -2. За добијено k испитати ток и скицирати график функције.

5. Дата је функција $y = ax^2 - 2x - 5$. Одредити параметар a тако да функција достиже максимум $y = -2$. За добијено a испитати ток и скицирати график функције.

6. У функцији $y = 3x^2 - bx + 7$ одредити параметар b тако да она има минимум за $x = 1$. За добијено b испитати ток и скицирати график функције

7. У функцији $y = x^2 - (2m-1)x + 2$ одредити вредност реалног параметра m тако да је једна њена нула $x_1 = 2$. За добијено m испитати ток и скицирати график функције.

КВАДРАТНА НЕЈЕДНАЧИНА

1.Решити неједначину:

а) $x^2 + 2x - 15 \geq 0$ б) $2x^2 - x - 1 < 0$ в) $2x^2 - 3x - 2 > 0$.

2.Решити неједначину:

а) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3} \geq 0$ б) $\frac{12x^2 - x - 6}{x^2 + 6x + 8} < 0$ в) $\frac{x-3}{x^2 - 5x + 6} \leq 2$ г) $\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} \leq -1$ д) $\frac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} \leq 3$

3.Решити систем квадратних неједначина:

$$\begin{array}{lll} 2x + x^2 \leq 0 & 4x - x^2 \leq 0 & 2x - x^2 \leq 0 \\ -x^2 + 5x - 6 \geq 0 & x^2 - 5x + 6 \geq 0 & x^2 - x - 6 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x - x^2 \leq 0 & x^2 + 3x + 2 \geq 0 & 2x^2 + x - 1 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \leq 0 & x^2 - 4x - 21 \leq 0 & -x^2 + 4x + 21 \leq 0 \end{array}$$

4.Решити систем квадратних једначина:

$$\begin{array}{l} 2x^2 + 2y^2 + 3x - 2 = 0 \\ x - 2y = -2 \end{array};\quad \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 5 \\ x + y = 11 \end{array};\quad \begin{array}{l} x^2 - 8x - y + 15 = 0 \\ x + y = 5 \end{array};\quad \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 16 \\ x - y = 2 \end{array};$$

$\begin{array}{l} x^2y+xy^2=30 \\ x+y=5 \end{array}$; $\begin{array}{l} x^2y-xy^2=30 \\ x-y=5 \end{array}$ $\begin{array}{l} x^2y-xy^2=2 \\ x-y=1 \end{array}$; $\begin{array}{l} x^2+y^2+x+y=18 \\ x^2-y^2+x-y=6 \end{array}$; $\begin{array}{l} x^2+y=13 \\ x^2+y^2=25 \end{array}$;

$\begin{array}{l} x^2+y=9 \\ x^2y=20 \end{array}$; $\begin{array}{l} 2x^2+3y^2=12 \\ 5x^2-2y^2=11 \end{array}$; $\begin{array}{l} 4x^2+2xy+6x=27 \\ x^2-5xy+6y^2=0 \end{array}$.

5.Наћи решење ирационалне једначине:

$\sqrt{x^2-9}=x-1$, $\sqrt{25-x^2}=7-x$, $\sqrt{2x^2-1}=x$, $\sqrt{3x^2-20x+16}=x-4$,

$3\sqrt{-x^2+x+6}=4x-2$, $\sqrt{4x^2-7x-2}=2(x+1)$, $\sqrt{x^2-5x+10}=8-2x$.

6. Решити једначину:

а) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1$ б) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$ в) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

г) $\sqrt{4x+5}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}$ д) $\sqrt{2x+14}-\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}$

ђ) $\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}=\sqrt{2x-8}$ е) $\sqrt{3x+13}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+3}$

ж) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-8}$ з) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}$

и) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$ ј) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}=5$

5. ТРИГОНОМЕТРИЈА:

1.Упростити:

$$\frac{\cos\frac{17\pi}{6}\cdot tg\left(-240^\circ\right)\cdot\sin 190^\circ}{tg115^\circ\cdot\cos1180^\circ} \qquad \frac{\sin\frac{17\pi}{3}\cdot ctg\left(-140^\circ\right)\cdot\cos 200^\circ}{\cos\frac{5\pi}{6}\cdot tg900^\circ}$$

$$\frac{\sin\frac{19\pi}{6}\cdot ctg\left(-140^\circ\right)\cdot\cos 240^\circ}{tg230^\circ\cdot\cos\left(-900^\circ\right)} \qquad \frac{\cos\frac{14\pi}{3}\cdot tg\left(-150^\circ\right)\cdot\sin 210^\circ}{\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\cdot ctg910^\circ}$$

$$\frac{\cos\frac{7\pi}{6}\cdot ctg\frac{\pi}{4}\cdot\cos1160^\circ}{ctg\frac{5\pi}{3}\cdot\cos100^\circ\cdot\sin\left(-130^\circ\right)} \qquad \frac{\cos\frac{11\pi}{3}\cdot tg\frac{7\pi}{6}\cdot\sin130^\circ}{\cos\left(-3\pi\right)\cdot\sin\left(-230^\circ\right)}$$

$$\frac{tg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\pi+\alpha\right)\cdot ctg\left(\pi-\alpha\right)\cdot} \qquad \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{tg\left(\pi+\alpha\right)\cdot ctg\left(3\pi-\alpha\right)\cdot}$$

$$\frac{\cos\left(\pi-\alpha\right)\cdot ctg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{tg\left(\pi+\alpha\right)-ctg\left(3\pi-\alpha\right)\cdot} \qquad \frac{ctg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\left(\pi+\alpha\right)}{tg\left(\pi+\alpha\right)\cos\left(2\pi+\alpha\right)+\sin\left(\alpha-2\pi\right)}$$

$$\frac{tg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\left(3\pi-\alpha\right)}{ctg\left(\pi+\alpha\right)\sin\left(2\pi+\alpha\right)+\cos\left(\alpha-2\pi\right)} \qquad \frac{\cos\left(2\pi-\alpha\right)\cdot tg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{tg\left(\pi-\alpha\right)-ctg\left(3\pi+\alpha\right)\cdot}$$

АДИЦИОНЕ ТЕОРЕМЕ

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ &\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\ &tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta} \\ &ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\alpha \pm ctg\beta} \end{aligned}}$$

1. Доказати идентитете:

а) $(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 = 2 + 2\cos(x - y)$

б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)} = ctg\alpha$ в) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = ctg\alpha ctg\beta - 1$

г) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$ д) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = tg\alpha + tg\beta$

ђ) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$ е)

$\sin^2\alpha + \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) = \dfrac{3}{2}$ ж) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{1 - tg\alpha tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$

з) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) - \cos^2\alpha$

2. Ако је $tg\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$, одредити $tg\alpha$.

3. Израчунати $tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$, ако је $tg2\alpha = 3$

4. Израчунати $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right)$, ако је $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

5. Израчунати $\sin(\alpha + \beta)$, ако је $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ $\sin\beta = -\dfrac{3}{5}$ и α припада четвртом, а β трећем квадранту.

6. Израчунати $\sin(\alpha - \beta)$, ако је $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ $\sin\beta = -\dfrac{24}{25}$ и α припада трећем квадранту, а β четвртом.

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ ДВОСТРУКОГ УГЛА

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\\&\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\&tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\\&ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}\end{aligned}}$$

1. Доказати идентитете:

а) $\frac{1+\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = ctg\alpha$

б) $\frac{2-\sin 4\alpha\, tg2\alpha}{\sin 4\alpha} = ctg2\alpha$

в) $\frac{\sin^2 2x + 4\sin^4 x}{\sin^2 2x + 4\cos^4 x} = tg^2 x$

г) $\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = tg\alpha$

д) $\frac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos x + \cos 2x} = tgx$

ђ) $\frac{\sin 2\alpha - \sin\alpha}{1-\cos\alpha + \cos 2\alpha} = tg\alpha$

е) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1 - 0{,}5\sin^2 2\alpha$

ж) $\frac{\sin 2t}{\sin t + \sin t\cos 2t} = \frac{1}{\cos t}$

з) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x} = tg\frac{x}{2}$

2. Израчунати $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, tg2\alpha$, ако је $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

3. Ако је $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ израчунати $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, tg2\alpha, ctg2\alpha$.

4. Ако је $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ израчунати $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, tg2\alpha, ctg2\alpha$.

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ ПОЛУУГЛА

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} && 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha\\&\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} && 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha\\&tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} && ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\end{aligned}}$$

1. Израчунти вредност тригонометријских функција угла $\alpha = \frac{\pi}{8}$

2. Ако је $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ израчунати $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}, ctg\frac{\alpha}{2}$.

3. Ако је $tg\alpha = -\frac{4}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ израчунати $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}, ctg\frac{\alpha}{2}$.

4. Ако је $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ израчунати $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}, ctg\frac{\alpha}{2}$.

5. Користећи тригонометријске функције полууглова израчунати $\sin\frac{\pi}{12}, \cos\frac{\pi}{12}, tg\frac{\pi}{12}, ctg\frac{\pi}{12}$

6. Ако је $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ израчунати $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}, ctg\frac{\alpha}{2}$.

7. Ако је $ctg\alpha = \frac{7}{24}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ израчунати $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}, ctg\frac{\alpha}{2}$.

ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ЗБИРА И РАЗЛИКЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА У ПРОИЗВОД И ОБРНУТО

Трансформације збира у производ

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Трансформације производа у збир:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

1. Трансформацијом збира и разлике у производ израчунати: $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$

2. Користећи формуле за трансформацију производа у збир или разлику упростити израз: $4\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

3. Користећи формуле за трансформацију збира и разлике у производ упростити израз: $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

4. Производ трансформисати у збир или разлику: $4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\frac{3\alpha}{2}$

5. Применом трансформација производа тригонометријских функција у збир или разлику израчунати: $\frac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \sin 66^\circ}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \cos 51^\circ \sin 69^\circ}$

6. Применом трансформација производа тригонометријских функција у збир или разлику израчунати:

   а) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ б) $\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$ в) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$ г) $\sin\frac{\pi}{8} \cdot \sin\frac{2\pi}{8} \cdot \sin\frac{3\pi}{8}$

7. Трансформисати у производ:

   а) $\sin 25^\circ + \sin 37^\circ + \sin 27^\circ + \sin 35^\circ$ б) $\sin 20^\circ + \sin 34^\circ + \sin 24^\circ + \sin 30^\circ$

8. Израчунати:

$\sin\frac{\alpha}{2}, \cos 2\alpha, tg\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, ако је: $\cos\alpha = -\frac{12}{13}, \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$;

$\cos\frac{\alpha}{2}, \sin 2\alpha, tg\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, ако је: $\sin\alpha = -\frac{4}{5}, \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$;

$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right), \sin\frac{\alpha}{2}, ctg 2\alpha$, ако је: $\sin\alpha = -\frac{12}{13}, \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$;

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right), \cos\frac{\alpha}{2}, tg 2\alpha$, ако је: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}, \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Испитати ток и скицирати график функције:

а) $y = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ б) $y = \frac{1}{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ в) $y = -3\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

г) $y = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ђ) $y = 2\sin\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

1.Решити тригонометријску једначину:

$2\sin x - 1 = 0$, $2\cos x - \sqrt{2} = 0$, $2\sin x + 1 = 0$, $\sqrt{2}\cos 2x - 1 = 0$, $2\sin\frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$,

$2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2} = 0$, $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0$, $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$, $\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$,

$\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$,

$\sin^2 x + 2\sin x = 0,\quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0,\quad -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0,\quad \cos^2 x + \cos x = 0,$

2.Решити тригонометријску једначину:

$2\sin^2(270^\circ - x) + 2\cos(360^\circ - x) = 3$ $\cos 3x + \cos 5x = 0$ $\sin 3x = \cos 2x$

$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{2}$ $\sin 5x + \sin 6x + \sin 7x = 0$ $\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$

$\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$ $3tg^3 x + tgx = 0$ $\cos x - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$

$2\sin^4 x - 2\cos^4 x - 1 = 0$ $8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0$ $2 + \cos 4x = 2\sin^2 x$.

СИНУСНА И КОСИНУСНА ТЕОРЕМА

1. Решити троугао без употребе рачунских помагала:

   а) $a = 2\sqrt{2}, \alpha = 45^\circ, \beta = 120^\circ$ б) $a = 3 + \sqrt{3}, b = 3\sqrt{2}, \alpha = 75^\circ$

   в) $a = \sqrt{6}, b = 2\sqrt{3}, c = 3 - \sqrt{3}$ д) $b = \sqrt{6}, c = 3 + \sqrt{3}, \alpha = 45^\circ$

2. Дужине страница једног троугла су $a-2, a, a+2$, а један угао је 120° . Одредити a .

3. Нека је у троуглу ABC: $c = 2, a : b = \sqrt{7} : 3, \alpha = 60^\circ$. Израчунати странице троугла.

6. Експоненцијална функција, јеначина и неједначина:

1. Користећи график и особине експоненцијалне функције, упоредити степене:

   а) упоредити степене 2^{-7} и $\left(\frac{1}{4}\right)^5$ б) упоредити m и n: $\left(\frac{1}{2}\right)^n \triangleright 8^m$,

   в) упоредити степене : 2^{-3} и $\left(\frac{1}{4}\right)^7$ г) упоредити изложиоце: $\left(\frac{1}{2}\right)^n \triangleright 16^m$,

   д) упоредити степене : 2^5 и $\left(\frac{1}{8}\right)^7$ ђ) упоредити изложиоце: $\left(\frac{1}{16}\right)^n \triangleleft 2^m$.

2.Реши експоненцијалне једначине:

а) $2^{\frac{x+1}{x}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 1$) б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} = 5^3$ в) $2^{x+2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$ г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} = 8$

3.Реши једначине:

а) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} = 9$ б) $2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} = 4$

в) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$ в) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$

г) $2^{4x} + 2^{4x-1} + 4^{2x-1} + 2^{4x-3} + 16^{x-1} = 31$ д) $2^{4x} + 2^{4x-1} + 4^{2x-1} + 2^{4x-3} + 16^{x-1} = 31$

4.Реши једначине:

а) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ б) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} = 5^{x+1} - 5^{x+2}$

в) $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$ г) $6^x - 2^x + 6^{x+1} = 2^{x+1} + 2^{x+2}$

5.Реши једначине:

а) $5^x - 5^{3-x} = 20$ б) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$ в) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$

г) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$ д) $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$ ђ) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$

6.Реши неједначину:

а) $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$ б) $0,25^{\frac{1}{x}} < 0,0625$ в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} > \frac{4}{9}$

г) $0,25^{3x-1} < 4$ д) $2^{x^2-2x} > 1$ ђ) $0,3^{3x^2-10x+5} \geq 0,09$

7.Логаритамска функција, једначина и неједначина

1.Наћи област дефинисаности (домен) функције:

а) $y=\log_3\left(3x^2-2x\right)$ б) $y=\log_3\left(3x^2-2x-1\right)$ в) $y=\log_3\left(2x-x^2\right)$

2. Скицирај график функције:
а) $y=\log_2 x+3$ б) $y=\log_{\frac{1}{2}} x+3$ в) $y=\log_2 x-2$

3.Израчунати:

а) $\log_3 81+\log 100-\log_9 3$ б) $5\cdot\log_2 16-3\cdot\log_{\frac{1}{2}} 2+\log_{25} 125$ в) $2^{1+\log_2 3}-3^{2\log_3 5}$

г) $3\cdot\log_3 9-4\cdot\log_{25} 5+\log_8 16$ д) $2\cdot\log_2 8+\log_{\frac{1}{3}} 9-2\cdot\log_{49} 7$ ђ) $5^{2+\log_5 3}+2^{2\log_2 5}$

е) $3\cdot\log_7\frac{1}{49}+\log_{\frac{1}{3}} 27-2^{-\log_2 3}$ ж) $2\cdot\log_2 8+\log_{\frac{1}{3}} 9-2^{2\log_2 7}$ з) $3\cdot\log_5\frac{1}{5}+\log_{\frac{1}{3}} 81-2^{-2\log_2 3}$

4.Наћи x из једначине:

а) $\log x+\log 2=\log 3+3\log 2-\log 6$ б) $2\log x=3\log 1+2\log 3-\log 16$
в) $\log x-\log 2=\log 4+2\log 2-\log 16$.

5.Реши једначине:

$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)=2$, $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=-2$, $\log_{\sqrt{3}}(x-1)=2$, $\log_2\left(x^2-2x\right)=3$,

$\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7$, $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2$, $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3$,

$\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{81} x=1$ $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$, $\log_5 x+\log_{25} x+\log_{125} x=\frac{11}{6}$,

$\log_3{}^2 x-\log_3 x^5+6=0$, $\log_2{}^2 x-\log_2 x^3=4$, $\log_2{}^2 x-3=\log_2 x^2$, $\log_3 x+\log_x 9=3$.

6.Реши логаритамску неједначину:

$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)<-2$, $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)<0$, $\log_2\left(x+2x^2\right)>0$, $\log_{\frac{1}{8}}(x-7)>-\frac{2}{3}$

$\log_2\left(x^2-3x+4\right)<1$, $\log_2\left(5-x^2\right)>1$, $\log_3\left(4-x^2\right)<1$, $\log_7\left(3x^2-5\right)<1$