КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

Формуле:

$$z=a+ib, a=\operatorname{Re}(z), b=\operatorname{Im}(z), \bar{z}=a-ib$$

$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}, (\varphi): \cos\varphi=\frac{a}{r}, \sin\varphi=\frac{b}{r}, tg\varphi=\frac{b}{a}\Rightarrow z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$$

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\Rightarrow z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

1. Написати комплексне бројеве у тригонометријском облику

I. $z=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$

II. $z=-2+2\sqrt{3}i$

III. $z=7\frac{\sqrt{2}}{2}+7\frac{\sqrt{2}}{2}i$

2. Наћи производ и количник комплексних бројева(користећи њихов тригонометријски облик):

I. $z_1=4(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ), z_2=2(\cos 35^\circ+i\sin 35^\circ)$

II. $z_1=6(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}), z_2=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

3. Представити комплексне бројеве у тригонометријском облику:

I. $z=\dfrac{-1-i}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$

II. $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})}$

III. $z=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}{-2-2\sqrt{3}i}$

4. Применом Моавровог обрасца одредити степен датог комплексног броја:

I. $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, z^{24}=?$

II. $z=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, z^{10}=?$

III. $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}, z^{20}=?$

5. Решити једначине у скупу комплексних бројева:

I. $z^4=i$

II. $z^3=-i$

III. $z^4=-16$

IV. $z^3=-1$

ПОЛИЕДРИ

ПРИЗМА

Формуле:

$P = 2B + M, V = BH$

База је троугао: разнострани са страницама : $B = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}, s = \dfrac{a+b+c}{2}$

разнострани са страницом и њој одговарајућом висином $B = \dfrac{a \cdot h_a}{2} (= \dfrac{bh_b}{2} = \dfrac{ch_c}{2})$

разнострани са страницама и углом између њих: $B = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin \prec (a,b)}{2}$

разнострани са полуобимом и полупречником уписаног круга: $B = s \cdot r$

разнострани са страницама и полупречником описаног круга: $B = \dfrac{abc}{4R}$

правоугли са катетама: $B = \dfrac{ab}{2}$

једнакостранични : $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (висина $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ је исто што и тежишна дуж)

База је четвороугао: квадрат: $B = a^2, B = \dfrac{d^2}{2}$

правоугаоник: $B = ab$

паралелограм: $B = ah, B = ab\sin\alpha, \alpha = \prec (a,b)$

ромб: $B = ah, B = \dfrac{d_1 d_2}{2}, B = a^2 \sin\alpha)$

трапез: $B = mh (= \dfrac{a+b}{2} h)$

делтоид: $B = \dfrac{d_1 d_2}{2}$

База је правилан шестоугао: $B = 6\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Омотач се састоји од паралелограма(правоугаоника),чији број зависи од многоугла у основи.

1. Наћи површину и запремину квадра ако су основне ивице квадра $a = 7cm, b = 24cm$, а његова дијагонала дуга је $D = 5\sqrt{26}cm$ cm.
2. Дијагонала квадра је $D = 4\sqrt{2}$ cm, нагнута је према равни основе под оглом од 60°. Ако је површина основе $B = 12cm^2$.Наћи запремину квадра.
3. Основа праве призме је правоугли троугао чије су катете $8cm$ и $6cm$, а висина призме је једнака хипотенузиној висини троугла у основи. Израчунати површину и запремину те призме.
4. Површина омотача праве једнакоивичне тростране призме је $M = 48cm^2$. Израчунати површину и запремину призме.

5. Површина основе правилне тростране призме је $4\sqrt{3}\,cm^2$, а површина омотача је $96\,cm^2$. Израчунати површину и запремину дате призме.

6. Странице троугла су $b=6cm, c=7cm$ и оне заклапају угао од 30°. Израчунати запремину призме чија је висина $H=6cm$, а основа је дати троугао.

7. Основа праве призме је троугао са страницама $a=13cm, b=14cm, c=15cm$. Израчунати површину и запремину призме, ако је њена висина једнака висини троугла која одговара страници b .

8. Основа праве призме је троугао са стрницама $25cm, 17cm, 12cm$. Наћи површину призме, ако је њена запремина $720cm^3$.

9. Основне ивице праве тростране призме односе се 17:10:9, бочна ивица је $16cm$, а површина призме је 1440 cm^2. Израчунати основне ивице.

10. Основне ивице правог паралелопипеда су a=17 cm и b= 12 cm , већа дијагонала основе износи $d_1 = 25$ cm , а већа дијагонала паралелопипеда је $D_1 = \sqrt{629}$ cm . Израчунати површину и запремину паралелопипеда.

11. Основа праве четворостране призме је правоугаоник страница $a = 5\,cm$, и $b = \sqrt{2}\,cm$. Израчунати запремину призме ако дијагонала призме гради са основом угао од 60°.

12. Основа праве призме је ромб чије су дијагонале d_1=5 cm, d_2=12 cm. Израчунати запремину призме, ако је њена висина једнака висини ромба.

13. Основа праве призме је ромб странице $a = 2\sqrt{2}cm$ и оштрог угла $\alpha = 45^\circ$ Израчунати површину и запремину призме, ако је њена висина два пута већа од висине ромба.

14. Основа праве призме је ромб висине $h = 2\sqrt{3}cm$ и оштрог угла $\alpha = 60^\circ$ Израчунати површину и запремину призме, ако је њена висина $H = 10cm$.

15. Основа призме је правоугли трапез чије су основице $a = 8cm, c = 2cm$, а дужи крак c=10cm . Израчунати површину и запремину призме ако је њена висина једнака краћем краку трапеза.

16. Основа призме је једнакокраки трапез чије су основице $a = 12cm, c = 2cm$, а крак c=13cm . Израчунати површину и запремину призме ако је њена висина једнака висини трапеза.

17. Основа призме је трапез чије су основице $a = 18cm, c = 4cm$, а кракова b=13cm и d=13cm . Израчунати површину и запремину призме ако је њена висина једнака висини трапеза.

18. Основа призме је трапез чије су основице $a = 18cm, c = 4cm$, а кракова b=13cm и d=13cm . Израчунати површину и запремину призме ако је њена висина једнака висини трапеза.

19. Основа призме је паралелограм чије су странице $a = 13cm, b = 14cm$,а дијагонала 15 cm. Наћи запремину призме ако је њена површина $876cm^2$.

20. Површина већег дијагоналног пресека правилне шестростране призме је 24 cm^2 и обим 22 cm. Израчунати површину и запремину призме

ПИРАМИДА

Формуле:

$P = B + M, V = \frac{BH}{3}$

База може бити иста фигура као код призме,а омотач се састоји од троуглова чији број зависи од броја страница многоугла у основи.

1. Израчунати површину и запремину правилне једнакоивичне четворостране пирамиде основне ивице $a = 4cm$.
2. Запремина правилне четворостране пирамиде је $V = 48cm^3$, а њена висина је $H = 9cm$. Израчунати основну ивицу, апотему и површину пирамиде.
3. Израчунати површину и запремину правилне четворостране пирамиде основне ивице $a = 16cm,$ ако се висина пирамиде према апотеми односи 3:5.
4. У правилној четвоространој пирамиди основне ивице $a = 6cm,$ висина пирамиде је за $1\,cm$ краћа од апотеме. Израчунати површину и запремину пирамиде.
5. Израчунати површину и запремину правилног тетраедра основне ивице a.
6. Основа пирамиде је једнакокраки трапез основица $a = 8\,cm, c = 2\,cm$ и површине $P = 30cm^2$. Израчунати запремину пирамиде ако је њена висина једнака висини трапеза.
7. Израчунати површину и запремину правилне шестостране пирамиде основне ивице $a = 4cm$, ако апотема са основом гради угао од 30°.
8. Површина омотача правилне шестостране пирамиде M=$30\sqrt{3}$ cm^2, а површина читаве пирамиде је P=$48\sqrt{3}$ cm^2. Одредити запремину пирамиде.
9. Израчунати висину и запремину правилне тростране зарубљене пирамиде, ако су дужине основних ивица $a = 40\,cm, b = 10\,cm,$ а дужина бочних ивица $20\,cm.$
10. Израчунати површину и запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде, ако су дужине основних ивица $a = 8\,cm, b = 6\,cm$, а бочна страна гради са равни основе угао од 60°.
11. Израчунати запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде, ако су дужине основних ивица $a = 9\,cm, b = 5\,cm$, а дијагонала $D = \sqrt{102}cm$.
12. Израчунати запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде, ако су површине њених основа $50\,cm^2$ и $8cm^2$,а дијагонални пресек има површину $35cm^2$.
13. Израчунати запремину правилне тростране зарубљене пирамиде, ако су основне ивице $a = 12cm, b = 9cm$, а бочна ивица гради са равни основе угао од 30°.
14. Израчунати запремину правилне тростране зарубљене пирамиде основица $a = 10cm, b = 8cm$,ако бочна страна гради са равни основе угао од 30°.

ОБРТНА ТЕЛА

ВАЉАК

Формуле:

$P = 2B + M, V = BH$
База је круг : $B = r^2\pi$, Омотач је правоугаоник: $M = 2r\pi H$

1. Квадрат дијагонале $3\sqrt{2}cm$ ротира око једне своје странице. Израчунај површину и запремину насталог тела.
2. Израчунај површину и запремину тела које настаје када правоугаоник страница $a = 4cm, b = 10cm$ ротира око: а)краће странице б) дуже странице
3. Израчунај површину и запремину тела које настаје када правоугаоник странице $a = 5cm$ и дијагонале $d = 13cm$ ротира око: а)краће странице б) дуже странице
4. Обим основе ваљка је $20\pi cm$. Израчунати површину, запремину и површину осног пресека ваљка ако је висина ваљка два пута већа од полупречника основе.
5. Израчунати површину правог ваљка ако је полупречник основе $r = 9cm$, а запремина ваљка $1863\pi cm^3$.
6. Када се омотач ваљка висине $H = 12cm$ развије у правоугаоник његова дијагонала је $d = 13cm$. Израчунати површину и запремину тог ваљка.
7. Осни пресек ваљка је квадрат површине $64cm^2$. Израчунати површину и запремину тог ваљка.
8. Наћи полупречник основе и висину ваљка, ако је збир дужина пречника и висине ваљка је 27cm,а површина дијагоналног пресека $180cm^2$.
9. Око призме чија је основа правоугли троугао катета $a = 6cm, b = 2cm$ описан је ваљак. Висина призме једнака је пречнику основе ваљка. Израчунати површину и запремину тог ваљка.
10. У призму чија је основа троугао страница 10cm, 17cm и 21cm, и висина H=6cm уписан је ваљак. Израчунати површину и запремину ваљка.
11. Око призме чија је основа троугао страница 13cm, 14cm и 15cm, и висина H=6cm описан је ваљак. Израчунати површину и запремину ваљка.
12. У правилну тространу призму је уписан и око ње описан ваљак. Израчунати однос запремина та два ваљка.

КУПА

Формуле:

$P = B + M, V = \frac{BH}{3}$

База је круг: $B = r^2\pi$, омотач је кружни исечак: $M = rs\pi$

1. Наћи запремину купе чија је изводница $s = 10cm$, а површина $P = 96\pi cm^2$.
2. Однос полупречника основе и висине купе је 3:4 . Ако је површина омотача купе M= 60π cm^2, израчунати површину и запремину купе.
3. Површина праве купе је $P = 125\pi cm^2$, а површина њеног омотача је четири пута ваћа од површине основе купе.Израчунати запремину купе.
4. Изводница купе, дужине $10\sqrt{3}cm$ са равни основе гради угао од 30° . Наћи површину и запремину купе.
5. Запремина праве купе је $V = 120\pi cm^3$,а однос полупречника основе и висине купе је 3:5. Израчунати површину купе.
6. Запремина праве купе је $V = 96\pi cm^3$,а однос висине и изводнице купе је 4:5. Израчунати површину купе.
7. Основа пирамиде је ромб дијагонала $d_1 = 10cm, d_2 = 24cm$.Висина пирамиде је $H = 15cm$.Наћи запремину купе уписане у дату пирамиду.
8. Правоугли трапез основица a= 13 cm и c= 5 cm и висина $h = 6cm$ ротира око:
   а) дуже основице б)краће основице в)краћег крака
   Израчунај површину и запремину насталог тела.
9. Једнакокраки трапез паралелних страница a= 8 cm и c= 2 cm и крака $b = 5cm$ ротира око:
   а) дуже основице б)краће основице
   Израчунај површину и запремину насталог тела.
10. Једнакокраки трапез основица a= 14 cm и c= 2 cm и површине $P = 56cm^2$ ротира око: а) дуже основице б)краће основице
    Израчунај површину и запремину насталог тела.
11. Једнакокраки трапез основица a= 12 cm и c= 8 cm и површине $P = 60cm^2$ ротира око: а) дуже основице б)краће основице в) своје осе симетрије
    Израчунај површину и запремину насталог тела.
12. Правоугли трапез основица $a = 13cm, c = 5cm$ и висине $6cm$, ротира око веће основице. а) дуже основице б)краће основице в)краћег крака
    Израчунај површину и запремину насталог тела.

ВЕКТОРИ

Формуле:

Вектор у простору: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ јединични вектори ортонормиране базе)

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$,вектор дат координатно

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^2 + a_3^2}$,интензитет вектора

Скаларни производ: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\prec(\vec{a},\vec{b})$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \prec(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\pi}{2}$,вектори су међусобно ортогонални

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1, a_2, a_3)\ (b_1, b_2, b_3) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$ преко координата

Векторски производ: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\prec(\vec{a},\vec{b})$, $P = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ површина паралелограма

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b}$ су колинеарни(паралелни)

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \text{ преко координата}$$

Мешовити производ: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ преко координата}$$

$V = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$,запремина паралелопипеда

1. Ако је $\overrightarrow{AB} = (-4,2,9)$ и $A(4,-3,1)$ одредити координате тачке B.

2. Нека су $A(1,5,1), B(6,8,-2), C(1,0,2)$ три тачке у простору. Одредити кординате вектора:
  I. $\overrightarrow{BC}$
  II. $4\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

3. Ако је $\left|\vec{a}\right| = 2, \left|\vec{b}\right| = 3$ и угао између вектора $\prec(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$ одредити скаларни производ вектора $\vec{a}, 2\vec{a} - \vec{b}$.

4. Ако су $\vec{m},\vec{n}$ ортогонални јединични вектори и $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$,одредити $\left|\vec{a}\right|$.

5. Одредити угао који образују вектори $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}, \vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$,ако су $\vec{m},\vec{n}$ јединицни вектори који граде угао од $\dfrac{2\pi}{3}$.

6. Одредити скаларни производ вектора $\vec{a} = (2,3,-1), \vec{b} = (4,1,5)$.

7. Наћи реалан параметар m тако да вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = m\vec{i} - 6\vec{j}$ буду ортогонални.

8. Доказати да је троугао са теменима $A(2,4,5), B(-3,2,2), C(-1,0,3)$ правоугли.

9. Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ образују угао од $\frac{\pi}{4}$.Ако је $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ одредити $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

10. Дати су вектори $\vec{a} = (-1,1,0), \vec{b} = (2,1,3,), \vec{c} = (1,1,1)$. Израчунати $\vec{c} \times \vec{b}, |\vec{a} \times (\vec{b} \times) \vec{c}|$.

11. Израчунати површину и висину која одговара страници AB троугла ABC са теменима $A(1,-2,8), B(0,0,4), C(6,2,0)$.

12. Дата су три узастопна темена паралелограма $A(3,-3,1), B(5,0,2), C(-1,1,1)$. Одредити координате темена D,пресечну тачку дијагонала,угао између дијагонала и површину паралелограма.

13. Доказати да су тачке $A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1), D(2,1,3)$ компланарне.

14. Израчунати запремину паралелепипеда конструисаног над векторима $\vec{a} = (0,1,1), \vec{b} = (1,0,1), \vec{c} = (1,1,0)$.

15. Израчунати запемину тетраедра чија су темена $A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7), D(-5,-4,8)$

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

ПРАВА

Формуле:

Растојање између две тачке $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ $d(A,B)=AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Подела дужи AB тачком $C=(x_3,y_3)$ у датој размери $\frac{AC}{CB}=\lambda$: $x_3=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y_3=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

Ако је $C=(x_3,y_3)$ средиште дужи AB: $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}, y_3=\frac{y_1+y_2}{2}$

Експлицитни облик ј.не праве : $y=kx+n$, $k=tg\alpha$ је коефицијент правца праве,
n је одсечак праве на y оси

Ј.на праве кроз једну тачку $C=(x_1,y_1)$: $y-y_1=k(x-x_1)$

Ј.на праве кроз две тачке $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

Услов паралелности правих p_1,p_2 : $k_1=k_2$

Услов нормалности правих p_1,p_2 : $k_1k_2=-1$

Угао између две праве p_1,p_2 : $tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$

Растојање тачке $C=(x_1,y_1)$ од праве $p{:}ax{+}by{+}c{=}0$: $d(C,p)=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

1. Одредити m тако да растојање тачке A(1,2) од праве $x-2y+m-1=0$ буде $\sqrt{5}$.

2. Одредити угао који заклапају праве : (обавезна слика)

I. $2x-y+3=0$ и $x-3y-1=0$

II. $x+3y-5=0$ и $y-2x+2=0$

III. $y-2x+2=0$ и $x-1=0$

3. Написати једначину праве која садржи тачку M и са осом Ox заклапа дати угао α :а) M(3,-1), $\alpha=45^\circ$ б) M(-2,-3), $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

4. Написати једначину праве која садржи тачку A(-1,3) и која је паралелна правој:

I. $y=3x+1$

II. $-2x-y+4=0$

5. Написати једначину праве која садржи тачку A (2,-3) и која је нормална на праву:

I. $y=-\frac{x}{2}+1$

II. $3x-2y=0$

6. Написати једначину праве која садржи тачку A (1,1) и која са правом $2x+3y+4=0$ гради угао од 45°.

7. Написати једначину праве која садржи тачку C (-2,2) и која је :

I. паралелна са правом која садржи тачке A(2,2) и B(-4,-1)

II. нормална на праву која садржи тачке A(2,2) и B(-4,-1)

8. Темена троугла су тачке A(-2,-1), B(4,-2), C(1,2) .

I. Написати једначину праве која садржи висину h_c и израчунати њену дужину.
II. Израчунати угао α
III. Израчунати површину троугла.
IV. Израчунати дужину тежишне дужи t_c

9. На правој $x-y-1=0$ одредити тачку T која је једнако удаљена од тачака A(6,3) и B(2,5).

10. Одредити координате нормалне пројекције тачке P(3,5) на праву $x-2y+2=0$.

11. Темена троугла су тачке A(-6,5), B(-2,7), C(-5,-2) .

I. Написати једначину праве која садржи висину h_c и израчунати њену дужину.
II.Израчунати угао α .
III.Израчунати површину троугла.
IV.Израчунати дужину тежишне дужи t_c .

12. Одредити координате тачке M која је симетрична тачки A(7,2) у односу на праву $x-3y-3=0$.

КУЖНИЦА

Формуле:

Канонски облик ј.не кружнице са центром у $C=(p,q)$ и полупречником r :
$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$
Услов додира праве(тангенте) и кружнице: $(1+k^2)r^2=(kp-q+n)^2$
Ј.на тангенте у тачки $C=(x_1,y_1)$ са кружнице: $(x-p)(x_1-p)+(y-q)(y_1-q)=r^2$

1. Написати једначину круга који садржи тачку $A(3,\frac{1}{2})$ и који је концентричан кругу $x^2+y^2+2x+5y=0$.

2. Круг садржи тачке A(3,0) и B(- 1,2), а центар му је на правој x-y+2=0. Одредити једначину круга.

3. Одредити темена једнакокраког троугла чија је основица тетива коју на правој x-2y+3=0 одсеца кружница $x^2+y^2+-10x+2y+1=0$ и коме је треће теме на Ox-оси.

4. Тачке A(- 1,3) и B (3,5) су крајеви дужи. Наћи геометријско место тачака из којих се та дуж види под правим углом.

5. Одредити $k \in R$ у једначини y=kx+10 тако да та права буде тангента кружнице $x^2+y^2=20$,а затим одредити тачку додира.

6. Одредити једначине тангенти круга $x^2+y^2=5$ које су паралелне правој 2x-y+3=0.

7. Одредити једначине тангенти кружнnице $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ које су

I.паралелне са правом $4x-3y-12=0$

II.нормалне на правој $3x+4y-10=0$.

8. Одредити вредности параметра m тако да права 2x+y+m=0 додирује кружниц $x^2+y^2-2x-2y-8=0$.

9. Одредити једначину тангенте кружнице $x^2+y^2+6x+4y+3=0$ у њеној тачки T(-6,y).

10. Под којим се углом види кружница $x^2+y^2-4x-2y-8=0$ из тачке T(3,6).

11. У тачкама пресека праве x-7y+29=0 и кружнице $x^2+y^2+8x-9=0$ конструисане су тангенте на кружницу. Одредити угао између тангенти и површину троугла чија су два темена поменуте пресечне тачке, а треће је пресек тангенти.

12. Одредити центар и полупречник кружнице описане око троугла чија су темена:

I.A(5,6), B(-3,2), C(-2,-1)

II. A(-6,5), B(-2,7), C(-5,-2).

ЕЛИПСА

Формуле:

Ј.на елипсе чија је **велика полуоса** a ,а **мала полуоса** b : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,
жиже(фиксиране тачке такве да је **збир растојања** до било које тачке са елипсе константан) $F_1(c,0), F_2(-c,0)$, $c^2=a^2-b^2$
Услов додира праве(тангенте) и елипсе: $a^2k^2+b^2=n^2$
Ј.на тангенте у тачки $C=(x_1,y_1)$ са елипсе: $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

1. Одредити дужину тетиве коју на правој $x+y-2=0$ одсеца елипса $x^2+3y^2=12$.
2. Под којим се углом види дуж F_1F_2 елипсе $4x^2+5y^2=180$ из тачке $M(x>0,4)$ која припада елипси .
3. Израчунати површину једнакокраког троугла уписаног у елипсу $x^2+3y^2=36$, ако је основица троугла тетива елипсе која припада правој $x-y+6=0$, а треће теме припада y- оси.
4. Написати једначину тангенте елипсе $x^2+3y^2=16$ у њеној тачки $A(x>0,2)$.
5. Написати једначине тангенти елипсе $x^2+4y^2=20$ и одредити координате додирних тачака, ако су тангенте паралелне правој $x+y-7=0$.
6. Одредити p тако да права $x+2y-p=0$ буде тангента елипсе $x^2+2y^2=12$.
7. Написати једначине тангенти елипсе $x^2+4y^2=20$ и одредити координате додирних тачака, ако су тангенте нормалне на праву $-x+y-2=0$.
8. Одредити једначину елипсе ако су праве $x+y-8=0$ и $x+3y+16=0$ њене тангенте.
9. Одредити угао под којим се елипса $x^2+3y^2=12$ види из тачке $P(0,4)$.

ХИПЕРБОЛА

Формуле:

J.на хиперболе чија је **реална полуоса** a ,а **имагинарна полуоса** b : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,

жиже(фиксиране тачке такве да је **модуо разлике растојања** до било које тачке са елипсе константан) $F_1(c,0), F_2(-c,0)$, $c^2=a^2+b^2$

Асимптоте хиперболе су праве : $y=\pm\frac{b}{a}$

Услов додира праве(тангенте) и елипсе: $a^2k^2-b^2=n^2$

J.на тангенте у тачки $C=(x_1,y_1)$ са елипсе: $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$

1. Одредити дужину тетеиве хиперболе $9x^2-y^2=144$ на правој x-y+4=0
2. Под којим се углом види из тачке M(5,8) тетива хиперболе $x^2-3y^2=1$ која припада правој x-y-3=0.
3. Под којим се углом види реална оса хиперболе $2x^2-y^2=2$ из тачке P(3,y>o) на хиперболи.
4. Одредити пресечне тачке праве y=3x+3 и хиперболе $3x^2-y^2=3$ и написати једначине тангенти у тим тачкама.
5. Одредити вредности параметра m тако да права а) x-y-m=0 б) mx-3y=0 буде тангента хиперболе $3x^2-4y^2=36$
6. Написати једначине тангенти хиперболе $3x^2-4y^2=72$ које су паралелне правој 3x+2y+1=0 и одредити координате додирних тачака.
7. Написати једначине тангенти хиперболе $x^2-5y^2=20$ које су нормалне на праву -x+y-7=0.
8. Написати једначину хиперболе ако су праве 2x-y-1=0 и 7x-4y-1=0 њене тангенте. Одредиити координате додирних тачака.
9. Под којим се углом види хипербола $3x^2-y^2=3$ из тачке P(5,9).
10. Написати једначину тетиве хиперболе $4x^2-9y^2=36$ коју полови тачка M(5,1).

ПАРАБОЛА

Формуле:

Ј.на параболе чији је параметар $p=2c$ и теме у координатном почетку : $y^2=2px$, жижа(фиксирана тачка $F_1(c,0)$)таква да је **растојање** од ње до било које тачке са параболе **једнако растојању** било које тачке са параболе до директрисе(фиксирана права $x=-c$), Услов додира праве(тангенте) и параболе: $p=2kn$ Ј.на тангенте у тачки $C=(x_1,y_1)$ са параболе: $yy_1=p(x+x_1)$

1. Израчунати дужину тетиве параболе $y^2=4x$ која припада правој $y-2x+4=0$.
2. Написати једначину тангенте параболе $y^2=2x$ у њеној тачки $A(8,y<0)$.
3. Написати једначину тангенте параболе $y^2=12x$ која је паралелна правој $x-y+5=0$
4. Написати једначину тангенте параболе $y^2=8x$ која је нормална правој $2x+2y-3=0$.
5. Одредити тачку на параболи $y^2=8x$ која је најближа правој $x+y+4=0$.
6. Написати једначину оне тетиве параболе $y^2=4x$ која је тачком $M(5,2)$ преполовљена.
7. Одредити тачку на правој $x+y+4=0$ која је најближа параболи $y^2=8x$.

КРИВЕ 2. РЕДА (КОМБИНОВАНИ ЗАДАЦИ)

1. Дате су парабола $y^2=8x$ и тачка $T(-2,3)$ а) Написати једначине тангенти конструисаних из дате тачке на параболу
   I. Одредити угао под којим се види парабола из дате тачке
   II. Одредити додирне тачке A, B тих тангенти
   III. Израчунати површину троугла TAB.
2. Одредити заједничке тачке елипсе $x^2+4y^2=4$ и кружнице која садржи жиже елипсе, а центар јој је у темену на позитивном делу y- осе.
3. На тангенти елипсе $4x^2+5y^2=20$ која је конструисана у њеној тачки $M(\frac{-5}{3}, y>0)$ лежи тетива хиперболе $4x^2-y^2=36$. Одредити дужину тетиве.
4. Наћи заједничке тангенте кривих :
   I. $y^2=4x$; $x^2+y^2-2x-9=0$
   II. $x^2+y^2+3x=0$; $y^2=9x$
   III. $x^2+y^2+6x+4=0$; $y^2=8x$
   IV. $y^2=20x$; $9x^2+16y^2=144$
   V. $y^2=16x$; $3x^2-y^2=12$
5. Око жиже параболе $y^2=12x$ конструисана је кружница која додирује директрису параболе. Одредити једначину кружнице и угао пресека параболе и кружнице.
6. Права $x+2y+4=0$ додирује параболу $y^2=2px$. Одредити: а) једначину параболе б) једначине заједничких тангенти параболе и кружнице $x^2+y^2-2x-9=0$.
7. Одредити једначину елипсе којој припада тачка $N(5\sqrt{2},4\sqrt{2})$, а жиже јој се поклапају са жижама хиперболе $x^2-y^2=18$.
8. Одредити угао под којим се секу криве $3x^2+4y^2=84$ и $3x^2-4y^2=12$ и једначине тангенти у једној пресечној тачки

НИЗОВИ И ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗА

Формуле:

Аритметички низ: $a_n = a_1 + (n-1)d$, константна разлика суседних чланова($a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = d...$)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2})$$

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ збир првих n чланова низа

Геометријски низ: $a_n = a_1 q^{n-1}$,константан количник суседних чланова ($\frac{a_2}{a_1} = q, \frac{a_3}{a_2} = q...$)

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} \quad (a_n = \sqrt{a_{n-k}a_{n+k}})$$

$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$ збир првих n чланова низа

$$S_\infty = a_1 \frac{1}{1-q}, \quad q \in (-1,1)$$

Гранична вредност : $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$

1. Наћи збир првих 17 чланова аритметичког низа чији је пети члан 13,а девети 19.
2. Израчунати n, a_n у аритметичкој прогресији код које је $a_1 = 2, d = 5, S_n = 245$.
3. Израчунати d, a_1 у аритметичкој прогресији код које је $a_n = 105, n = 15, S_n = 840$.
4. Збир првог и петог члана аритметичког низа је 26,а производ другог и четвртог је160. Наћи збир првих 16 чланова низа.
5. Збир три узастопна члана аритметичког низа је 150. Ако је највећи од њих четири пута већи од најмањег,наћи прва четири члана низа.
6. Наћи растући аритметички низ у коме је збир прва три члана 27,а збир њихових квадрата је 275.
7. Израчунати количник геометријског низа ако је његов први члан 1,а шести 1024.
8. Израчунати први члан геометријског низа ако је збир његових првих 12 чланова 8190,а количник му је 2.
9. Одредити геометријску прогресију за коју важи: збир другог и трећег члана је 18, а разлика четвртог и другог члана је 24.
10. Наћи суму првих 6 чланова геометријског низа код кога важи: $a_1+a_3=20$, $a_1 +a_2+a_3=26$.
11. Наћи прва четири члана геометријског низа ако је: $a_5-a_1=15$, $a_4-a_2=6$.
12. Збир три узастопна члана геометријског низа је 93. Исти бројеви се могу узети као први ,други и седми члан аритметичког низа. Који су то бројеви?
13. Збир три узастопна члана геометријског низа је 114. Исти бројеви се могу узети као први ,четврти и двадесетпети члан аритметичког низа. Који су то бројеви?
14. Одредити граничну вредност низа:
    a. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2 + 4n + 5}{5 - 3n^2}$
    b. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^3 + n + 5)}{(5 - 3n^2)(2n - 3)}$

c. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{3n^2+5n-9}$

d. $\lim_{n\to\infty}\frac{8-8n^2}{1+3+5+...(2n-1)}$

15. Одредити граничну вредност низа:

a. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n})^{5n}$

b. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{4n}{n^2+2})^{3n-7}$

c. $\lim_{n\to\infty}(\frac{6n+5}{1+6n})^{n-8}$