Друга година -- поправни испит

Испит се састоји из писменог и усменог дела. Писмени део траје два школска часа

Садржај:

1. Степеновање

2. Кореновање

3. Комплексни бројеви

4. Квадратна једначина, квадратна функција, квадратна неједначина

5. Тригонометрија

6. Експоненцијална функција, јеначина и неједначина

7. Логаритамска функција, једначина и неједначина

Литература:

- Уџбеник за 2.разред средње школе(4 часа недељно)
- Збирке задатака од: 1) Вене Богославов
- 2) Срђан Огњановић
- 3) Милорад Јоковић, Иванка Томић
- Припремили: Д. Радојевић,Д.Михајловић Петровић ,Н.Васиљевић

1. СТЕПЕНОВАЊЕ И КОРЕНОВАЊЕ

1. Израчунати:

1) $\frac{((-5)^{-6})^{-2}\cdot 75^{-2}\cdot 25^{2}}{(25^{-2})^{-4}\cdot 6^{-2}10^{-4}}$ 2) $\frac{\left(\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}-2^{-2}\right)^{-3}}{5^{0}+3^{-2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}}$

3) $\left(-6+4\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2}+\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\frac{3}{4}\right)^{-1}$ 4) $\frac{\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{0}-\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right)\cdot 8^{6}\cdot 3^{17}\cdot 9^{10}}{243^{5}\cdot((-9)^{-2})^{-3}\cdot 16^{5}}$

5) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-4}$ 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+0{,}2^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$

7) $\left(\frac{6}{2^{-1}}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+0{,}5^{-1}\right)\cdot(((-3)^{3})^{56}:(3^{4})^{42})$

2. Упростити:

1) $\left(\frac{a^{-1}x^{3}}{b^{-1}y^{4}}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{a^{4}b^{-3}}{x^{3}y^{-2}}\right)^{3}$ 2) $\left(\left(\frac{a^{-2}b}{xy^{-3}}\right)^{-3}:\left(\frac{ab^{-2}}{x^{2}y}\right)^{2}\right)\cdot\left(\frac{xy}{ab}\right)^{3}$

3) $\frac{(a^{3}b^{-4})^{2}}{(2a^{-3}b^{4})^{3}}:\frac{(a^{-3}b^{-2})^{2}}{(4a^{-4}b^{-5})^{-1}}$ 4) $\left(\left(\frac{2a^{-2}}{3ab^{-3}}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3b^{-3}}{4a^{-2}}\right)^{-3}\right)\cdot\frac{b^{7}}{12^{-1}a^{-11}}$

3. Упростити израз:

1) $((a+1)^{-1}-(b+1)^{-1})^{-1}:(a-b)^{-1}$ 2) $\frac{(ab^{-1}-ba^{-1})^{-1}}{(a^{-1}-b^{-1})^{-1}}\cdot(a+b)^{-1}$

3) $\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}-ba^{-1}}\right)^{-1}+\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{2}\right)^{-1}$ 4) $\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\left(\frac{a^{2}+b^{2}}{ab}\right)^{-1}$

5) $\left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}-\frac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)^{-1}(a^{-1}-b^{-1})$

4. Израчунати:

1) $\sqrt{200}+2\sqrt{8}-\left(\sqrt{50}-2\sqrt{125}+3\sqrt{75}\right)$ 2) $3\sqrt{12}+\frac{2}{5}\sqrt{75}-7\sqrt{3}+\frac{8}{3}\sqrt{27}-\frac{5}{4}\sqrt{48}$

3) $\frac{3\cdot\sqrt[3]{(-2)^{3}}+2\cdot\sqrt{(-4)^{2}}}{\sqrt[4]{(-3)^{4}}+\sqrt[5]{(-4)^{5}}}$ 4) $2\sqrt{3}\left(5\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)-\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^{2}$

5) $\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 6) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{6}{3-\sqrt{3}}-\frac{4}{3-\sqrt{5}}$

7) $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)$ 8) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}-\frac{15}{\sqrt{3}-3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}$

5. Упростити израз:

1) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$ 2) $\frac{1+a}{1+(1+a)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1-a}{1-\left(\frac{1}{1+a}\right)^{-\frac{1}{2}}}$ 3) $\frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}+x}:\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}-1}$

6. Упростити израз:

1) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[6]{a^2b^3} \cdot \sqrt[6]{a^9b^8}$

2) $\left(\sqrt[3]{\frac{3a^2b}{2c}} \cdot \sqrt{\frac{ab}{c}} \cdot \sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}\right) : \left(\sqrt[6]{\frac{a^3b^2}{2c}} \cdot \sqrt[12]{\frac{81b^7}{16c^7}}\right)$

3) $\sqrt[6]{\frac{y}{x}} - \sqrt{\frac{xy^2}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2y}{16}} : \left(\sqrt[3]{\frac{xy^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{x^2y}{8}}\right)$

4) $\sqrt[3]{\frac{a+1}{a}} : \sqrt{1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}} : \sqrt[6]{\frac{a^2}{a^2-a+1}}$

5) $\sqrt[3]{\frac{a}{x} + \frac{x}{a} - 2} : \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}$

6) $\sqrt[4]{\frac{3a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{4x}{9y}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{2y} \cdot \sqrt[4]{\frac{4ay}{3bx}}}$

7) $x \cdot \sqrt{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}}} - \sqrt{\sqrt[4]{x}}}$

8) $\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^{-1}}} \cdot \sqrt[3]{x^{-1} \cdot \sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{x^{-1} \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}} \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x^{-1}}}}$

2. КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

1. Наћи $Re(z), Im(z), |z|, \bar{z}$ ако је:

   а) $z = i^{121} \cdot (1+i)^{26}$ б) $z = (2-3i)^2$ в) $z = (i+3)(3+2i) + (3+5i)(5i-3)$

   г) $z = \frac{6i+1}{1-7i}$

2. Наћи реални и имагинарни део комплексног броја z, као и његов модуо, ако је $z = \frac{1+2i}{1-3i} - \frac{2-3i}{2+2i}$

3. Ако је $z_1 = 2+3i$ $z_2 = -2-4i$ $z_3 = -1+i$ израчунати $z_1 \cdot \overline{z_2} - \frac{z_1}{z_3}$, па за добијени резултат одредити имагинарни и реални део.

4. Одредити реални и имагинарну део комплексног броја z, као и његов модуо, ако важи: $(2+i)z + 2z - 3 = 4 + 6i$

3.1 ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА (ПРОГРАМ ЗА ТРИ ЧАСА МАТЕМАТИКЕ НЕДЕЉНО)

1. Израчунати z_1z_2 , ако је:

   а) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$, $z_2 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$

   б) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), z_2 = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

   в) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ и $z_2 = 3\sqrt{2}(1+i)$

2. Израчунати $\frac{z_1}{z_2}$, ако је:

   а) $z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, $z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

б) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

в) $z_1 = -1 + i\sqrt{3}, z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

3. Израчунати $z_1 z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$, ако је:

   а) $z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12},\ z_2 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ б) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right),\ z_2 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{19\pi}{8} + i\sin\frac{19\pi}{8}\right)$

   в) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ г) $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right), z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

4. Израчунати: а) $\sqrt[3]{1}$ б) $\sqrt[3]{i}$ в) $\sqrt[4]{-4}$ г) $\sqrt[3]{1+i}$ д) $\sqrt[3]{1-i}$ ђ) $\sqrt[3]{-1-i}$ е) $\sqrt[4]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$
5. Ако је $z = i - \sqrt{3}$, израчунати z^{13}.
6. Ако је $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, израчунати z^6.
7. Ако је $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ израчунати z^{20}.

4.КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА, ФУНКЦИЈА, НЕЈЕДНАЧИНА

1. Решити једначину:

   а) $(x-1)^2 - (x+1)^2 + (x+3)^2 = (2x-5)(3x-1)$

   б) $(3x-1)^2 - (2x+1)(2x-1) = (x-3)^2 + 2$

   в) $(3-x)^2 + (20+4x)^2 = (x+15)^2$

   г) $(3x-4)^2 + (2x+1)^2 - (3x-2)^2 = (x-1)(x+11)$

2. Решити једначину:

   а) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{5-x} + \frac{3x^2}{4(x-2)(x-5)} = 0$ б) $1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2+7x-4} = \frac{6}{2x-1}$

   в) $\frac{2x+1}{3x-2} - \frac{2x-1}{3-2x} - \frac{4x^2-12x}{6x^2-13x+6} = 0$ г) $\frac{x+6}{x-5} + \frac{x-5}{x+6} = \frac{12x+61}{x^2+x-30}$

   д) $\frac{2x-3}{24x^2+36x} + \frac{2}{4x^2-9} = \frac{4-x}{12x^2-18x}$ ђ) $\frac{5x}{2x^2-x-1} - \frac{5}{2x+1} = \frac{4x-5}{x^2-1}$

ПРИРОДА РЕШЕЊА КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Дискриминанта D квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ је $D = b^2 - 4ac$.
Ако је $D > 0$ једначина има два различита реална решења.
Ако је $D = 0$ једначина има двоструко реално решење
Ако је $D < 0$ решење једначине је пар конјуговано-комплексних бројева.

1. Одредити реалан параметар тако да дата једначина,

а) има реална и једнака решења, б) има једно решење један, в) има реципрочна решења, г) има супротна решења.

$x^2 + 2(3-m)x + 2m - 3 = 0$ $4x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3m - 1 = 0$

$x^2 - 2(m-2)x - (2m-4) = 0$ $(m-2)x^2 - (m+1)x + m + 1 = 0$

2. Дата је квадратна једначина $x^2+kx+k=0$. Одредити k тако да су решења конјуговано-комплексни бројеви.

3. У зависности од реалног параметра m одредити природу решења једначине:

а) $(m-1)x^2-(2m+1)x+m-1=0$ б) $mx^2+(2m+5)x+m=0$.

4. Одредити вредност реалног параметра m тако да решења дате квадратне једначине буду реална и једнака:

а) $x^2-2(m-1)x-4m=0$ б) $(2m+1)x^2-(m+2)x+m-3=0$

5.За које вредности параметра k једначина $kx^2-2(k+1)x+k-1=0$ има реална решења?

ВИЕТОВА ПРАВИЛА

Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0$, тада важе релације:

$\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}; \quad x_1x_2=\frac{c}{a}}$ *које се зову Виетове формуле.*

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0}}$$

1. Саставити квадратну једначину чија су решења:

   а) $x_1=2, \quad x_2=5$ б) $x_1=1+3i \quad x_2=1-3i$ в) $x_1=2 \quad x_2=\frac{1}{2}$

2. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2-2mx+m^2+1=0$. Одредити $m\in R$ из релације $x_1^2+x_2^2=16$.

3. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2-2mx+2=0$. Одредити $m\in R$ из релације $(3x_1-1)(3x_2-1)=10$.

4. Одредити вредност параметра a, тако да решења једначине $x^2-(a-2)x+1=0$ задовољавају услов: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{2}x_1x_2+\frac{1}{2}=0$

5. Дата је једначина $3x^2-x-7=0$ чија су решења x_1 и x_2. Не решавајући ову једначину, одредити вредност израза: $4x_1^3+3x_1x_2^2+3x_1^2x_2+4x_2^3$

6. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $5x^2-3x-1=0$, не решавајући је, одредити вредност израза: $2x_1^3-3x_1x_2^2-3x_1^2x_2+2x_2^3$

7. Одредити вредност параметра k у једначини $x^2-(2k+1)x+k^2+2=0$, тако да једно њено решење буде једнако половини другог.

8. Решења једначине $x^2-x+a-2=0$ задовољавају услов: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{2}x_1x_2+4=0$. Одредити a.

9. У једначини $x^2+mx+8=0$, одредити реалан параметар m тако да је збир реципрочних вредности њених решења једнак $\frac{3}{4}$.

10. Скратити разломак:

    а) $\frac{2x^2+5x+2}{x^2-x-6}$ б) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x}$ в) $\frac{3x^2+2x-8}{12x^2-7x-12}$

г) $\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$ д) $\dfrac{(x^2-4)(8x^3-1)}{(2x^2+3x-2)(4x^2-8x)}$ ђ) $\dfrac{(x^3-2x^2-8x)(x^2-16)}{(x^3+8)(x^2+4x)}$

КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

1. За дату функцију, написати канонски облик, скицирати график у координатном систему и написати особине:

а) $y=4x^2-3$ б) $y=-x^2+5x$ в) $y=2x^2+3x$ г) $y=2x^2+3x+1$ д) $y=-x^2+x+2$

ђ) $y=\dfrac{1}{3}x^2+2x+4$ е) $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+8$

2. Дата је функција $y=ax^2-(2a+1)x+2(a+1)$. Одредити a тако да функција достиже екстремну вредност за $x=2$. За добијено a испитати ток и скицирати график функције .

4. У функцији $y=x^2-(k+1)x+k-2$ одредити реалан параметар k тако да функција има минимум једнак -2. За добијено k испитати ток и скицирати график функције.

5. Дата је функција $y=ax^2-2x-5$. Одредити параметар a тако да функција достиже максимум $y=-2$. За добијено a испитати ток и скицирати график функције.

6. У функцији $y=3x^2-bx+7$ одредити параметар b тако да она има минимум за $x=1$. За добијено b испитати ток и скицирати график функције

7. У функцији $y=x^2-(2m-1)x+2$ одредити вредност реалног параметра m тако да је једна њена нула $x_1=2$. За добијено m испитати ток и скицирати график функције.

КВАДРАТНА НЕЈЕДНАЧИНА

1. Решити неједначину:

а) $x^2+2x-15\geq 0$ б) $2x^2-x-1<0$ в) $2x^2-3x-2>0$.

2. Решити неједначину:

а) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}\geq 0$ б) $\dfrac{12x^2-x-6}{x^2+6x+8}<0$ в) $\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}\leq 2$ г) $\dfrac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}\leq -1$

ИРАЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ (четири часа математике недељно)

1. Наћи решење ирационалне једначине:

а) $\sqrt{x^2-9}=x-1$ б) $\sqrt{25-x^2}=7-x$ в) $\sqrt{3x^2-20x+16}=x-4$

г) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$ д) $\sqrt{2x+14}-\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}$

5. ТРИГОНОМЕТРИЈА

1. Израчунати:

а) $\frac{\cos\frac{17\pi}{6}\cdot\sin\frac{7\pi}{3}\cdot\mathrm{tg}\frac{17\pi}{4}\cdot\cos 1000°}{\mathrm{ctg}\frac{10\pi}{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{4}\cdot\sin\frac{8\pi}{3}\cdot\sin 170°}$ б) $\frac{\sin 750°\cdot\cos 390°\cdot tg1140°}{ctg405°\cdot\sin 1860°\cdot\cos 780°}$

в) $\frac{\cos 510°\cdot\sin\frac{7\pi}{3}\cdot\mathrm{tg}765°}{\mathrm{ctg}\frac{10\pi}{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{4}\cdot\sin 480°}$ г) $\sin\left(-\frac{21\pi}{2}\right)\cdot\cos 840° - \mathrm{tg}\frac{19\pi}{4}\cdot\sin(-585°)\cdot\cos\frac{23\pi}{6}$

2. Упростити израз:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ б) $\frac{\sin(\pi-x)\cdot tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cdot ctg(\pi-x)}$

в) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}-\frac{\sin(2\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(2\pi+\alpha)}$ г) $\frac{\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\pi+\alpha)\cdot\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)}$

АДИЦИОНЕ ТЕОРЕМЕ

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$$
$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp 1}{ctg\alpha\pm ctg\beta}$$

1. Доказати идентитете:

а) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\mathrm{ctg}\alpha$ б) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$

2. Коришћењем адиционих теорема израчунати $\cos 15°$.
3. Израчунати $\sin(\alpha-\beta)$, ако је $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\sin\beta=-\frac{24}{25}$, α припада трећем квадранту, а β четвртом.
4. Израчунати $\sin(\alpha+\beta)$, ако је $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=-\frac{3}{5}$, α припада четвртом квадранту, а β трећем.
5. Ако је $tg\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$, одредити $tg\alpha$.
6. Израчунати $tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, ако је $tg2\alpha=3$
7. Израчунати $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, ако је $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ ДВОСТРУКОГ УГЛА

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$$
$$ctg\,2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\,\alpha}$$

1. Доказати идентитете:

   а) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\sin\alpha\cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$ б) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
2. Ако је $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, одредити $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \mathrm{tg}2\alpha, \mathrm{ctg}2\alpha$.
3. Израчунати $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, tg2\alpha$ ако је $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.
4. Ако је $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ израчунати $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, tg2\alpha, ctg\,2\alpha$.

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ ПОЛУУГЛА

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha$$
$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad ctg\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

1. Израчунати вредност тригонометријских функција угла $\alpha = \frac{\pi}{8}$.
2. Користећи тригонометријске функције полууглова израчунати $\sin\frac{\pi}{12}, \cos\frac{\pi}{12}, \mathrm{tg}\frac{\pi}{12}, \mathrm{ctg}\frac{\pi}{12}$
3. Ако је $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, одредити $\sin\frac{\alpha}{2}$.
4. Ако је $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, одредити $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}, \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.
5. Ако је $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{4}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, одредити $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}, \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ЗБИРА И РАЗЛИКЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА У ПРОИЗВОД И ОБРНУТО

Трансформације збира у производ

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Трансформације производа у збир:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

1. Применом формула за трансформацију производа у збир доказати:

$$\sin(60° - \alpha)\sin(60° + \alpha) = \frac{1}{4}(2\cos 2\alpha + 1)$$

2. Применом формула за трансформацију збира и разлике у производ израчунати: $\frac{\cos 15° - \sin 15°}{\cos 75° + \cos 15°}$
3. Користећи формуле за трансформацију збира и разлику у производ упростити израз: $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$
4. Израчунати (применом формула за трансформацију): $2\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$
5. Применом формула за трансформацију израчунати: $\sin 75° + \sin 15°$.

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

1. Решити једначину:

а) $2\sin x - 1 = 0$ б) $\sqrt{2}\cos 2x - 1 = 0$ в) $2\sin\frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$

г) $\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$ д) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$ ђ) $8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0$

е) $\sin x\cos\frac{\pi}{7} + \cos x\sin\frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ж) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ з) $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$

и) $5\cos^2 x + 4\sin^2 x - 5 = 0$

6. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА

1. Решити једначине:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} = 5^3$ б) $2^{x+2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$ в) $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^x$

г) $3^{2x} - 10 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$ д) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$ ђ) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$

е) $5^x - 5^{3-x} = 20$ ж) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$ з) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$

2. Решити неједначине:

а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \geq 1$ б) $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$ в) $0{,}25^{\frac{1}{x}} < 0{,}0625$

г) $0{,}25^{3x-1} < 4$ д) $2^{x^2-2x} > 1$ ђ) $0{,}3^{3x^2-10x+5} \geq 0{,}09$

7. ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

1. Израчунати:

а) $\log_3 81 + \log 100 - \log_9 3$ б) $5\log_2 16 - 3\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{25} 125$

в) $2^{1+\log_2 3} - 3^{2\log_3 5}$ г) $3\log_3 9 - 4\log_{25} 5 + \log_8 16$

д) $\log_2 8 - 2\log_6 3 - \log_6 4$ ђ) $\log_{\frac{1}{9}}\left(\log_2\frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{1}{2}} 8\right)$

е) $((\log_3 2)^{-1} - \log_2 0{,}75 + \log_{16} 2)^{-\frac{3}{2}}$ е) $10^{0{,}5-\log_{10}(0{,}375\sqrt{10})} - \log_2 0{,}0625$

2. Решити једначину:

а) $\log x + \log 2 = \log 3 + 3\log 2 - \log 6$ б) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) = 2$

в) $\log_2(x^2 - 2x) = 3$ г) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$

д) $\log_2(x-1) + \log_2(x+2) = 2$ ђ) $2\left(\log_x \sqrt{5}\right)^2 - 3\log_x \sqrt{5} + 1 = 0$

е) $\log_2^2 x + 2\log_2 \sqrt{x} - 2 = 0$

3. Решити неједначину:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(x-5) < -2$ б) $\log_2(x + 2x^2) > 0$ в) $\log_2(x^2 - 3x + 4) < 1$

г) $\log_2(5 - x^2) > 1$ д) $\log_7(3x^2 - 5) < 1$